マルチタスクの業績評価システム

佐藤 紘光

はじめに

学力のみを判定基準とする入学選抜方式の弊害を少しなりとも和らげるために，多次元の評価基準を導入する試みが近年盛んになってきたことは周知のところである。それとの対比で言えば，企業における業績評価は従来から多基準化の方向にあったといえよう。組織メンバーがさまざまな能力や努力を要求される多様な仕事に従事する組織においては，その総合力を引き出すために多基準評価の必要性が早くから認識されてきたからである。入試において多基準化を阻んできた要因は，いうまでもなく学力以外の測定尺度に客観性を付与することの困難性にある。企業における業績評価にも共通の問題が存在しており，多基準評価の導入にあたっては，測定精度の異なる尺度をいかに統合するかという問題の解決が必要となる。

理論がこの問題に接近するには，これまでシングルタスクのエイジェンシー関係を前提にしてきた分析モデルをマルチタスクに拡張することが必要となる。この分析作業は，従来のインセンティブ理論にいかなる論点といかなる説明力を付加するであろうか。このような視点から，このテーマに関する先駆的研究である Holmstrom and Milgrom［4］［5］, Ito［7］, Ramakrishnan and Thakor［10］等に依拠しながら，マルチタスクの業績評価システムを分析することが本稿の目的である。

1．マルチタスクへの拡張

エイジェント（管理者）が n 種類の仕事（タスク）を担当する状況を考えよう。それぞれの仕事に行使する努力をベクトル $a=(a_1,\ldots,a_n)$ と表す。a は，プリンシパル（経営者）が受け取る期待便益 $B(a)$ を生産すると同時に，エイジェントの個人的な負担となる金銭的コスト $C(a)$ を発生させる。収穫逓減を想定して，B は強意の凹関数，C は強意の凸関数と仮定する。同時に，a は次式で定義される業績情報 x をアウトプットする。

$$x=\mu(a)+\varepsilon$$

x は k 次元ベクトル，μ は R^n_+ を R^k に写像する凹関数，$\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ は，業績情報の不確実性（測定誤差）を表す撹乱要因であり，期待値をゼロ，分散共分散行列を Σ とする（k 次元の）多変量正規分布に従うものとする。プリンシパルは，エイジェントが行使する努力 a やそのコスト $C(a)$ を観察できないが，業績情報 x を入手でき，これに基づいて報酬 $z(x)$ をエイジェントに支払う。したがって，エイジェントの期待効用 EU は，

$$U(CE)=EU(z(\mu(a)+\varepsilon)-C(a))$$

と示される（EU の E は ε に関する期待値の演算を示す）。CE は上式右辺の期待効用に等しい効用をもたらす確実な所得，すなわち，確実性等価値（certainty equivalent）を表す。エイジェントはリスク回避的であり，所得 w に対する効用 U を次の負の指数関数で定義する。

$$U(w)=-\exp(-rw)$$

r は絶対的リスク回避係数である。さらに，報酬関数 $z(x)$ を次のような線型関数と仮定する[1)]。

$$z(x)=\alpha^T x+\beta$$

ここで，$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ は業績 x に対するコミッションレート（ピースレート），β は報酬の固定部分である。いうまでもなく，以下に論ずるインセンティブ・モデルの基本的な狙いは，業績 x を報酬 z に結びつけるコミッションレート α を適切に選択して努力 a を動機づけ，望ましい $B(a)$ を実現させることにある。

この報酬関数を前提にすると，エイジェントの確実性等価値 CE_A は次式になる[2)]。

$$CE_A=\alpha^T\mu(a)+\beta-C(a)-(r/2)\alpha^T\Sigma\alpha$$

$\alpha^T\Sigma\alpha$ は，業績 x の測定誤差に伴う報酬 z のリスクの大きさ（分散）を表し，これに（$r/2$）を乗じた項はエイジェントが負担するリスク・プレミアムを表す。つまり，確実性等価値は報酬の期待値から努力のコストとリスク・プレミアムを控除した値になる。他方，プリンシパルが受け取る期待利益は，

$$CE_P=B(a)-\alpha^T\mu(a)-\beta$$

となる。プリンシパルがリスク中立的であると仮定すると，期待利益は確実性等価値に一致する。したがって，組織全体の厚生，すなわち総余剰（joint surplus）は，

$$CE_P+CE_A=B(a)-C(a)-(r/2)\alpha^T\Sigma\alpha$$

となる。β は，2人の所得配分に影響を及ぼすが，上式が示すように総余剰にはなんら影響を与えないから，以下の論議ではこれを中立要因として扱う。

以上の道具だてで分析に入るわけであるが，最初に比較基準として，プリンシパルが努力を観察できるときの実行可能解（最善解）を求めておこう。その場合には，

$$B_i(a_i^*)=C_i(a_i^*)$$

を満足する a^* が最善解となる（添え字 i は a_i に関する1階微分を表わ

す）。a^*以外の行動を選択した場合にはペナルティを科すことができるから，報酬は最適リスク・シェアリングを保証する固定給となる。つまり，$\alpha=0$となるから，リスク・プレミアムを負担する必要がなくなり，総余剰は，

$$B(a^*)-C(a^*)$$

となる[3]。

さて，従来のエイジェンシー理論が説明してきたように，プリンシパルが努力を観察できないときは，動機づけが必要となる。その場合の(α, a)に関する最適契約，つまり次善解は次式によって求められる。

$$\max_{a,\,\alpha}\ B(a)-C(a)-(r/2)\,\alpha^T\Sigma\alpha \qquad (1)$$
$$\text{s. t. } a \in \operatorname{argmax}\ \alpha^T\mu(a)-C(a)$$

制約式はαを所与とするaの動機づけ条件式である（ただし，aに関連のない項は省略してある）[4]。

以下，単純化のために，$\mu(a)=a$と仮定しよう。すべてのa_iが正であるとすると，上記の動機づけ条件は次式になる[5]。

$$\alpha_i=C_i(a) \qquad \text{for all } i \qquad (2)$$

上式右辺をa_jに関して偏微分した行列を次のように表そう。

$$\partial\alpha/\partial a=[C_{ij}] \qquad (3)$$

そうすると，逆関数の定理により次式が導かれる。

$$\partial a/\partial\alpha=[C_{ij}]^{-1} \qquad (4)$$

上式はコミッションレートαの変化が努力水準aに及ぼす影響度，つまり，αに対するaの反応度を表している。

$a\gg 0$という前提のもとで，(1)の最適解を求めると次式になる[6]。

$$\alpha=(I+r\Sigma[C_{ij}])^{-1}B' \qquad (5)$$

ここで，Iはn次の単位行列，B'はa_iに関するBの一階微分ベクトル$(B_1, \ldots, B_n)$である。上式は，マルチタスクのインセンティブ・スキ

ームに関する一般式である。

この式の経済的意味を浮び上がらせるために，さらにいくつかの単純化を行おう。撹乱要因 ε_iが相互に独立（つまり，Σ が対角線行列）であり，コスト関数が相互に独立，つまり分割可能（$C_{i\,j}=0$ for all $i \neq j$）とすると，(5)は，

$$\alpha_i = (1 + r\sigma_{i\,i}C_{i\,i})^{-1}B_i \qquad \text{for all } i \qquad (6)$$

となる。上式は，タスク i に対するコミッションレート α_iが，① α_jに独立しており，②リスク回避係数 r とリスク $\sigma_{i\,i}$の減少関数であり，③限界利益 B_iと α に対する反応度（$1/C_{i\,j}$）の増加関数であることを示している。つまり，エイジェントが極度にリスク回避的（$r=\infty$）であったり，$\sigma_{i\,i}$が無限大，すなわち，業績 x_iが測定不能である場合には，$\alpha_i=0$ となって，（$C_i(0)=0$ であるかぎり）動機づけが不能になるという事実を示している。逆に，エイジェントがリスク中立的 ($r=0$) であるか，リスクそれ自体が存在しないとき (すなわち，$\sigma_{i\,i}=0$) は，$\alpha_i=B_i$となって，最善解が実現する。他方，$C_{i\,i}(>0)$ は努力の増加に伴う限界コストの増加率であるから，これはタスク i に対するエイジェントの態度を表すことになる。つまり，嫌な仕事であればあるほど，その値が大きくなり，コミッションレートが減少するから，動機づけ能力が低下するのである。

それでは，$C_{i\,j}\neq 0$ の場合には，いかなる含意が引き出されるであろうか。この点を，Holmstrom and Milgrom [5] が提示したモデルで検討してみよう。エイジェントは２種類の仕事（a_1, a_2）を割り当てられる。しかし，$\sigma_{2\,2}$が無限大であって，a_2を測定する業績尺度 x_2が存在しないため，x_1 $(=a_1+\varepsilon_1)$ だけで業績が評価されるものとする。たとえば，生産量や出来高などのように業績測定が比較的容易な仕事に対する努力が a_1であり，品質改善や研究開発などのように明確な成果測定が困難な仕事に対する努力が a_2である。いずれの仕事も重要であって，$a_i \gg 0$ が要求

されるとすると，最適契約は次式によって求められる（なお，共分散$\sigma_{12}=0$と仮定する）

$$\max_{a, \alpha} B(a_1, a_2) - C(a_1, a_2) - (r/2)(\alpha_1^2 \sigma_{11} + \alpha_2^2 \sigma_{22})$$
$$\text{s.t.} \quad \alpha_i = C_i \quad \text{for } i = 1, 2 \tag{7}$$

この最適解は次式になる[7]。

$$\alpha_1 = (B_1 - B_2 C_{12}/C_{22}) / [1 + r\sigma_{11}(C_{11} - C_{12}^2/C_{22})] \tag{8}$$

業績x_2は測定されないから，$\alpha_2=0$である[8]。仮定により，$C_{22}>0$であるから，もし，$C_{12}<0$，つまり，コスト関数が相互に補完的であって，一方の努力の増加が他方の努力の限界コストを引き下げるように働く場合には，α_1が増加する。逆に，$C_{12}>0$，つまり，コスト関数が相互に代替的であって，一方の努力の増加に伴い，他方の努力の限界コストが増加する場合には，α_1が減少する。たとえば、前者は，兼務している仕事がエキサイティングであるから，別の退屈な仕事にも耐えていけるというケースである。そうした好ましい因果連鎖が働く場合も個別的には少なからず存在するであろうが，経験的事実が示すところでは，組織環境はそれほど楽観的ではなく，コスト関数が代替的であるケースの方が遥かに一般的であろう。

その場合にはα_1が低下するという上述の命題には，いかなる経験的意味が含まれているであろうか。(6)で見たように，a_iの動機づけを行うには，α_i(の増加)によるのが常道であった。しかし，それにはもとより業績情報x_iが不可欠となる。したがって，本例のa_2のようにこれを測定する情報そのものがないときには，この常套手段をとることができない。マルチタスクのもとでは，それに代替する手段として，業績を測定できるタスクの機会原価（$\alpha_1 x_1$）を敢えて減少させ，a_1の（a_2に対する）相対的有効性を低めることによって，a_2の動機づけを補強するという間接的

な方法をとる余地が生じるのである。

さらに，コストの代替性に注目すると，(8)から次のような含意が引き出される。すなわち，a_1の微少的1単位の増加は，コストの代替性を通じて，a_2をC_{12}/C_{22}だけ減少させるから，期待利益を，B_1だけ増加させる反面，B_2C_{12}/C_{22}だけ減少させる。したがって，前者が後者を上回らないかぎり，(たとえ，$\sigma_{11}=0$，つまり，a_1が完全に測定可能であったとしても) α_1はゼロまたはマイナスの値になり，報酬は業績x_1に無反応か減少関数となる[9]。さらに，代替性が完全である場合，すなわち，$C(a_1, a_2)=C(a_1+a_2)$であるときには，$C_{11}=C_{12}=C_{22}$となるから，$\alpha_1=\alpha_2=0$となって[10]，固定給契約が最適となる。

簡単な数値例でこの結論の妥当性を確認しておこう。

$$B(a_1, a_2)=(a_1, a_2) \quad x_1=a_1+\varepsilon_1 \quad x_2=a_2+\varepsilon_2$$

$$\sigma_1=1 \quad \sigma_2=\infty \quad \sigma_{12}=0 \quad C(a_1, a_2)=0.25(a_1+a_2-1)^2$$

最善解は，$a_1+a_2=3$，$C(a_1, a_2)=1$，総余剰は，$CE=2$となるのに対し，次善解は，$B_1=B_2=1$であるから，$\alpha_1=\alpha_2=0$，$a_1+a_2=1$，$C(a_1, a_2)=0$，総余剰は，$CE=1$になる。

これらはマルチタスクに固有の特性である。また，この一連の文脈のなかから，信頼性のある（量的な）業績尺度があるにもかかわらず，これを報酬に結び付けるインセンティブ・スキームが，シングルタスクを前提とする従来のエイジェンシー理論が主張するほどには，実務において支配的になっていない理由の一端が明らかになる。エイジェントが，業績を比較的容易に測定できる仕事のほかに，品質や資産価値の維持・改善であるとか，成果が将来にしか現れないような業績測定の難しい仕事を兼務している場合に，いたずらに前者のみを強調するインセンティブ・スキームは，後者の動機づけを阻害するように働くであろう。組織が拡大するにつれて，そのような兼務体制が定着するであろうから，こ

の結論は，市場取引では報酬と業績が強く結びついた，いわゆる，“high-powered” なインセンティブ・スキームが採用されるのに対し，組織の内部取引では，両者の結びつきがより穏やかな “low-powered” なスキームが採用されるとする Williamson [14] の主張に合致する[11]。

以上の論議より，マルチタスクのもとでは，成果配分（報酬）が，危険分担機能と動機づけ機能のほかに，努力のタスク別配分機能を担うことが明らかになった。3つの機能はそれぞれトレードオフ関係にあるから，最適契約を求めるにはそれらの相互調整が必要になるのである。

次節の論議に入る前に，業績評価に果たす管理会計の情報機能に言及しておこう。いうまでもなく，その役割は信頼性のある業績情報 x_i の提供にあるから，測定誤差 σ_i の引き下げに努めることが必要になろう。さきの数値例において，業績 x_2 が測定可能であって，$\sigma_2 = 1$，$\sigma_{12} = 0$ であるとしよう。これを一般式(5)に適用して解を求めると，いかなるリスク回避係数のもとでも，総余剰は1を上回る。かりに，$r = 1$ とすると，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$，$a_1 + a_2 = 2$，$C(a_1, a_2) = 0.25$，$CE = 1.5$ になる。以上より，情報精度の改善が優越解を導くことが確認される。

2．複数エイジェントへの拡張

前節では，1人のエイジェントが複数の仕事を担当する状況を分析した。エイジェントの人数が複数になると，当然ながら，どの仕事をだれに割当て，どのように動機づけるべきかという問題が生じる。本節では，2人のエイジェント（A と B）が2つの仕事に直面している状況を想定して，この問題に接近しよう。

エイジェント A と B の努力のインプットを，それぞれ，$a = (a_1, a_2)$，$b = (b_1, b_2)$ とし（a_j，b_j は仕事 j に対するインプット），そのコストを，$C^A(a_1, a_2)$，$C^B(b_1, b_2)$ と表そう。これに対するタスク別の業績（利益）

を，

$$x_i = f_i(a_i,\ b_i) + \varepsilon_i \qquad i = 1,\ 2 \qquad (9)$$

と定義し，前節の期待利益 B に代え，$(x_1 + x_2)$ それ自体をプリンシパルが受け取るものと仮定しよう。したがって，$f_i(a_i,\ b_i)$ を凹関数と仮定する。

Holmstrom and Milgrom［4］は，生産関数が，$f_i\ (a_i,\ b_i) = f_i^A(a_i) + f_i^B(b_i)$ であれば，「技術的に分割可能」であり，$f_1(a_1,\ b_1) = f_A(a_1)$，$f_2(a_2,\ b_2) = f_B(b_2)$ であれば，「技術的に独立」であり，ε_1 と ε_2 の相関がなければ，「確率的に独立」であると呼んでいる。技術的に分割可能であれば，各エイジェントは共通の業績，すなわちチーム業績に独自の影響を与えることができるのに対し，技術的に独立であるときには，自己の業績指標にしか影響を与えることができない。

エイジェント A と B の報酬をここでも次の線型関数と仮定する。

$$z_A(x : \alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

$$z_B(x : \beta) = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2$$

ここで，$\alpha = (\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$，$\beta = (\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2)$ である。α_0 と β_0 は固定給部分，α_i と β_i は利益 x_i の配分額を表す $(i = 1,\ 2)$。所得に対する確実性等価値は次式になる（CE_B についても同様である）。

$$CE_A(a,\ b : \alpha) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i f_i(a_i,\ b_i) - C^A(a_1,\ a_2) - (r/2)\, r_A \alpha^T \Sigma \alpha$$

r_A は A のリスク回避係数であり，

$$\alpha^T \Sigma \alpha = \alpha_1^2\ \sigma_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_{1\,2} + \alpha_2^2\ \sigma_2^2 \qquad (10)$$

である。そうすると，プリンシパルの確実性等価値は次式になる。

$$CE_P(a,\ b : \alpha,\ \beta) = \sum_i (1 - \alpha_i - \beta_i)\ f_i(a_i,\ b_i) - \alpha_0 - \beta_0$$

本節では，各エイジェントは相互に非協力に行動し，仲間うちでの補助取引 (side-trade) を行えないという前提のもとで問題を分析する。その場合の最適契約は次式で求められる。

$$\max \quad \sum_i f_i(a_i,\ b_i) - C^A(a_1,\ a_2) - C^B(a_1,\ a_2)$$
$$- (r_A/2)\ \alpha^T \Sigma \alpha - (r_B/2)\ \beta^T \Sigma \beta \quad (11a)$$

$$\text{s. t.} \quad \alpha_i \partial f_i(a_i,\ b_i)/\partial a_i - \partial C^A(a_1,\ a_2)/\partial a_i = 0 \quad \text{for } i = 1,\ 2 \quad (11b)$$

$$\beta_i \partial f_i(ai,\ bi)/\partial b_i - \partial C^B(b_1,\ b_2)/\partial b_i = 0 \quad \text{for } i = 1,\ 2 \quad (11c)$$

目的関数は総余剰（$CE_P + CE_A + CE_B$）を最大化すべきことを，制約式はナッシュ均衡条件を表しており，(11b)は α と b を所与として CE_A を，(11c)は β と a を所与として CE_Bを，それぞれ最大化する１階の最適性条件である。以下，生産関数 $f_i(a_i,\ b_i)$の代表的ないくつかのケースについて，(11)の最適解を分析しよう。

［ケース１］　$x_1 = a_1 + b_1 + \varepsilon_1$　　$x_2 \equiv 0$

x_1は，２人の努力の総和を反映する共通業績である。しかし，生産関数が技術的に分割可能であるから，(11)はエイジェント別の個別問題に分割され，２人のインセンティブ契約は，次式のように相互独立になる。なお，本ケースでは，$C^A(a_1,\ a_2) = C_A(a_1)$，$C^B(b_1,\ b_2) = C_B(b_1)$ が仮定されている。

$$\alpha_1 = C_A' = (1 + r_A \sigma_1^2 C_A'')^{-1} \qquad \alpha_2 = 0 \qquad (12)$$

$$\beta_1 = C_B' = (1 + r_B \sigma_1^2 C_B'')^{-1} \qquad \beta_2 = 0 \qquad (13)$$

［ケース２］　$x_1 = a_1 + b_1 + \varepsilon_1$　　$x_2 = b_2$

エイジェント A は，ケース１と同様に共通業績で測定される仕事だけを担当するが，B はそれに加え個人業績となる別の仕事を兼務している。この場合の最適解は次式になる。

$$\alpha_1 = (1 + r_A \sigma_1^2 C_{1\,1}^A)^{-1} \quad \alpha_2 = 0 \qquad (14)$$

$$\beta_1 = (1 + r_B \sigma_1^2 C_{1\,1}^B)^{-1} \quad \beta_2 = 1 - \beta_1 r_B \sigma_1^2 C_{1\,2}^B \qquad (15)$$

$C^A(a_1,\ a_2) = C_A(a_1)$ であれば，(14)は(12)と同一になる。

β_1も同様であるが，β_2には新たな意味が含まれている。$\sigma_2 = 0$であるから，個人業績 x_2は a_2を誤りなく測定する。したがって，それだけを担当する（$\beta_1 = 0$）のであれば，$\beta_2 = 1$とすれば，最善解（すなわち，$C^B_2 = 1$を満足する b_2）が実現する。しかし，マルチタスクのもとでは，上式を見ると，そうなるのは，$C^B_{12} = 0$のとき，すなわち，コスト関数もタスク別に分割可能であるときに限られ，コスト関数が代替的（$C^B_{12} > 0$）であるときには，$\beta_2 < 1$となることがわかる。個人業績への努力配分は，共通業績に振り向ける努力を減少させるから，前者への過大配分を避けるには，それが発生させる機会原価（$\beta_1 r_B \sigma_1^2 C^B_{12}$）を認識させる必要があり，それによって，共通業績への動機づけが補強されるのである。

コスト関数が補完的（$C^B_{12} < 0$）である場合には，逆の論理が働き，$\beta_2 > 1$となる。

［ケース３］　$x_1 = a_1 + \varepsilon_1 \qquad x_2 = b_2 + \varepsilon_2$

本ケースは，生産関数が技術的に独立しているから，エイジェントは自分の担当する業績尺度にしか影響を与えることができない。ε_1と ε_2の相関係数を ρ とすると，この場合の最適解は次式になる（ここでもケース１と同様に，$C^A(a_1, a_2) = C_A(a_1)$，$C^B(b_1, b_2) = C_B(b_1)$と仮定する）[12]。

$$\alpha_1 = (1 + r_A \sigma_1^2 (1 - \rho^2) C''_A)^{-1} \tag{16a}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \rho \sigma_1 / \sigma_2 \tag{16b}$$

$$\beta_1 = -\beta_2 \rho \sigma_2 / \sigma_1 \tag{17a}$$

$$\beta_2 = (1 + r_B \sigma_2^2 (1 - \rho^2) C''_B)^{-1} \tag{17b}$$

生産関数が確率的にも独立（$\rho = 0$）であるときは，$\alpha_2 = \beta_1 = 0$となるから，業績評価は自己業績のみに責任を負う絶対評価となる。しかし，$\rho \neq 0$であるときには，α_2と β_1がノンゼロとなり，業績評価は，他者業績の影響を受けるから，相対評価に移行する。多くの場合，$\rho > 0$であろうから，α_2と β_1はマイナスになり，報酬は他者業績の減少関数となって，

評価は競争的になる。相手の業績が良い場合には，自分が責任を負う業績尺度の撹乱要因も良い値をとる確率が高いであろうから，その分だけ評価が割り引かれるのである。

$\rho\neq 0$ のときに α_2 と β_1 がノンゼロになるのは，それによってリスク・プレミアム RP を減少できるからである。ちなみに，(16b) を (10) に代入して，各エイジェントの RP を求めると，

$$
\begin{aligned}
RP_A &= (r_A/2)\,\alpha_1^2\,\sigma_1^2(1-\rho^2)\\
RP_B &= (r_B/2)\,\beta_2^2\,\sigma_2^2(1-\rho^2)
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

となり，RP は ρ^2 の減少関数となることがわかる。ρ^2 の増加は，α_1 と β_2 を増加させ，コスト関数 C の凸性を通じて，それぞれ，a_1 と b_2 を増大させる。それを可能にするのが，リスク・プレミアムの低下である。$\rho=\pm 1$ のときには，$\alpha_1=\beta_2=1$，$RP=0$ となり，最善解が実現する。

［ケース4］　$x_1=a_1+b_1+\varepsilon_1$　　$x_2=a_2+b_2+\varepsilon_2$

最初に，確率的に独立の場合を分析しよう。本ケースでは，2人はどの業績にも影響を与えることができるから，それぞれの仕事に単独責任 (sole responsibility) を負うべきか，それとも共同責任 (joint responsibility) を負うべきかが問題となる。前者の場合には，$\alpha_i>0$，$\beta_i>0$ $(i=1, 2)$ となり，後者の場合には，$\alpha_i\beta_j=0$ $(i\neq j)$ という関係が成立する。

いずれが合理的であるかは，コスト関数の構造に依存する。最初に，完全に代替的である場合を分析しよう。かりに，α_1，α_2 $(\beta_1$，$\beta_2)$ がともに正，つまり，共同責任を負うものと仮定すると，動機づけ条件式は，$C^{A\prime}(a)=\alpha_1=\alpha_2$ $(C^{B\prime}(b)=\beta_1=\beta_2)$ となる。この努力水準を $a_1+a_2=\hat{a}$ $(b_1+b_2=\hat{b})$ と表すと，共同責任を前提とする総余剰は，

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}+\hat{b}-C^A(\hat{a})-C^B(\hat{b})-r_A\sigma_1^2\,C^{A\prime}(\hat{a})^2\\
&-r_B\sigma_2^2\,C^{B\prime}(\hat{b})^2
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

となる。これを，$\alpha_1 = C^{A\prime}(\hat{a})$，$\beta_2 = C^{B\prime}(\hat{b})$，$\alpha_2 = \beta_1 = 0$，ゆえに，$a_1 = \hat{a}$, $b_2 = \hat{b}$, $a_2 = b_1 = 0$ とおきかえると，単独責任に移行することがわかる。このような組替えを行っても動機づけ条件式が充足されるから，実行可能性が失われることはない。その場合の総余剰は，

$$a_1 + b_2 - C_A(a_1) - C_B(b_2) - (r_A/2)\sigma_1^2 C^{A\prime}(\hat{a})^2 - (r_B/2)\sigma_2^2 C^{B\prime}(\hat{b})^2 \qquad (20)$$

となる。(19)と比較すると，単独責任への移行によって，リスク・プレミアムが半減することがわかる。つまり，コストが完全に代替的であるときには，努力水準の大小に関わらず，業績別のリスク・プレミアムが固定的に発生し，業績責任の共有はその重複負担を要求するために，単独責任が合理的となるのである[13)]。

$\rho > 0$ の場合には競争評価が有効になることは，ケース3で指摘したとおりである。しかし，各人がどの業績尺度にも影響力を行使できる本ケースにおいては，相対評価は逆機能を誘発する。というのは，相手の業績が悪いほど自己の評価が良くなるという競争関係を利用すれば，A は a_2を，B は b_1をマイナスにするよう，つまり，相手の「足を引っ張る」よう動機づけ，結果として利益の低下をもたらすからである[14)]。

コスト関数がタスク別に分割可能であるときにはどうであろうか。そこで以下では，

$$C^A(a_1, a_2) = C_{A1}(a_1) + C_{A2}(a_2)$$
$$C^B(b_1, b_2) = C_{B1}(b_1) + C_{B2}(b_2)$$

であり，右辺の各関数が強意に凸で，$C_{Ai}{}'(0) = C_{Bi}{}'(0) = 0$ と仮定しよう（$i = 1, 2$）。Ito［7］は，この場合には，単独責任ではなく，共同責任が合理的になることを明らかにしている。この仮定は，$C^A_{12} = C^B_{12} = 0$ を意味するから，あるタスクに配分する努力の変化は別のタスクの努力には影響を与えない。この前提のもとで，A に x_1の単独責任を負わせて

いる状況（つまり，$\beta_1=0$）において，β_1の値を若干増やし，Bにも責任を分担させることを考えよう。そうすると，b_1が正値になるから，コスト$C_{B1}(b_1)$とリスク・プレミアム$(r_B/2)\beta_1^2\sigma_1^2$が，それぞれ，少しずつ増加する。しかし，利益を同一水準に保持しながら，a_1をb_1だけ減少させる余地が生まれ，α_1の引き下げを通じて，コスト$C_{A1}(a_1)$とリスク・プレミアム$(r_A/2)\alpha_1^2\sigma_1^2$の節約が可能となる。$A$と$B$が同一属性をもつならば，コスト関数の凸性により，後者の節約額は前者の増加額を上回る。したがって，プリンシパルにとっては，どの仕事に対しても共同責任を負わせるのが合理的となるのである[15]。エイジェントが担当する業務を複数化して努力の負効用を分散させる考え方は，職務拡大や職務拡充という概念の基本理念となっている。

C''_{Ai}とC''_{Bi}が定数であるという前提のもとで，Ito［7］は，Aのコミッションレートを次式のように導出している。

$$\alpha_1=D^{-1}\ (1+r_A\sigma_2(m_{A2}-\rho m_{A1}))$$

$$\alpha_2=D^{-1}\ (1+r_A\sigma_1(m_{A1}-\rho m_{A2}))$$

ここで，

$$m_{Ai}=\rho_i C''_{Ai}$$

$$D=1+r_A(\sigma_1^2 C''_{A1}+\sigma_2^2 C''_{A2})+r_A^2(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 C''_{A1}C''_{A2}>0$$

である。m_{Ai}はその値が大きいほど動機づけコストが高いことを含意するから，$m_{A1}<m_{A2}$と仮定すると，α_1は，相関係数ρの値に関わらず，正になる。他方，$m_{A2}-m_{A1}<(r_A\sigma_1)^{-1}$であれば，$\alpha_2$もつねに正になるが，そうでなければ，$\alpha_2$が正になるのは，$\rho<\rho_A{}^*=(1+r_A\sigma_1^2 C''_{A1})/r_A\sigma_1\sigma_2 C''_{A2}$のときに限られる。

$\alpha_2>0$ならば，$a_2>0$となり，x_2に対する共同責任が生じて，仕事の上でのBとの「協調」が動機づけられる[16]。しかし，$\rho>\rho_A{}^*$の場合には，$\alpha_2<0$，つまり，業績評価が競争的になる結果，a_2が負になり，仕事の上

での前述した「足の引っ張りあい」が誘発される[17]。それが許容されるのは，前述したリスク・プレミアムの削減に伴う a_1 の増加が a_2 のマイナス効果を上回るからである。

3．集団業績評価

本節では，エイジェントが仲間うちで補助契約 (side-contracts) を結び，相互に協力 (cooperate) することをプリンシパルが許容する場合のインセンティブ契約を分析しよう[18]。そのような集団(coalition)の形成が，プリンシパルに負の影響を及ぼす場合には，その排除が必要となろうし，プラスの効果をもたらす場合には，補助契約を許容するインセンティブ契約が締結されるであろう。エイジェントが集団を形成する場合には，以下にみるように，業績は個人別ではなく集団として把握されるから，評価も集団に対してなされることになる。

補助契約の締結にあたっては，各エイジェントが共通に観察できる情報に基づいてサイド・ペイメント T を授受する約束が取り決められると考えるのが妥当であろう[19]。共通情報がプリンシパルには入手できない情報，つまり，(a, b) を含んでいれば，サイド・ペイメントは $T(a, b)$ と定義され，そうでなければ，$T(x)$ と定義されるであろう。前者の場合には，相互に相手の行動を観察できなければならないから，集団は相互監視 (mutual monitoring) に裏付けられた組織になる。後者の場合には，相互監視がなされないため，行動は各自の個人的な決定に委ねられる。したがって，集団を形成する意義はリスクの再配分に求められる。

後者の場合から分析しよう。かりに，x の実現値に応じてエイジェント A が B に γx を支払うとすると ($\gamma =$ (γ_1, γ_2) である)，2人の確実性等価値は次式になる。

$$CE_A = \alpha_0 + \sum_i (\alpha_i - \gamma_i)\ f_i(a_i,\ b_i) - C^A(a_1,\ a_2)$$

$$-(r_A/2)(\alpha-\gamma)^T\Sigma(\alpha-\gamma)$$

$$CE_B=\beta_0+\sum_i(\beta_i+\gamma_i)\ f_i(a_i,\ b_i)-C^B(b_1,\ b_2)$$
$$-(r_B/2)(\beta+\gamma)^T\Sigma(\beta+\gamma)$$

各自の行動選択は，それぞれ，$(\alpha-\gamma)$ と $(\beta+\gamma)$ に基づいて行われるであろうから，γ が0でない限り，非協力を前提とする(11)のナッシュ均衡解とは異なる行動が選択されるであろう。集団として決定する γ は，

$$\gamma\quad\text{argmin}\quad\{r_A(\alpha-\gamma)\Sigma(\alpha-\gamma)+r_B(\beta+\gamma)\Sigma(\beta+\gamma)\} \tag{11d}$$

を満足するように定められるであろうから，プリンシパルが，α と β ではなく，最初から，$(\alpha-\gamma)$ と $(\beta+\gamma)$ を提示すれば，リスクを再分配する余地がなくなる。したがって，前述の決定モデル(11)に制約条件として(11d)を追加すれば，均衡が回復されるであろう（ただし，(11a)〜(11c)の α と β は $(\alpha-\gamma)$ と $(\beta+\gamma)$ に置き換えられる)。しかし，制約条件の追加は実行可能領域を狭めるから，総余剰が低下するのは明白である[20]。したがって，追加情報を伴わない集団形成はプリンシパルに有効に働かないことが確認される。

次に、相互監視に基づいてサイド・ペイメント $T(a,b)$ が授受される場合を分析しよう。この場合には，行動 a と b は共同の決定事項となり，集団全体の期待効用が最大になるように選択されるであろうから，目的関数式は次のように定義される[21]。

$$(a,\ b)\quad \max\quad CE_A(a,\ b:\alpha)+CE_B(a,\ b:\beta) \tag{21b}$$

これに対するプリンシパルの決定問題は，制約条件(21b)のもとで，次式，すなわち，総余剰を最大化する α と β を発見する問題として定義される。

$$(\alpha,\ \beta)\quad \max\quad CE_P(a,\ b:\alpha,\ \beta)+CE_A(a,\ b:\alpha)$$
$$+CE_B(a,\ b:\beta) \tag{21a}$$

最初に，相互監視に基づく集団を形成する意義を前節の非協力解と比較しながら検討しよう。そこで，ケース3を例にとり，(16)と(17)の α と β に対する最適行動（すなわち，$\alpha_1=C_A(a_1)$，$\beta_2=C_B(b_2)$ を満足する a_1 と b_2）を選択するようにプリンシパルが集団に要求するものと仮定しよう。エイジェントが非協力の関係にあるときには，(16)と(17)の α と β が最適であることは前述したとおりである。

集団を形成している場合にはどうであろうか。その最適解を α' と β' と表そう。a と b は集団の決定であるから，x_i も集団業績と認識され，全体としての報酬は $\sum_i(\alpha'_i+\beta'_i)x_i$ となるから，$\alpha'_i+\beta'_i$ が集団業績の動機づけファクターとなる。(21b)の目的関数式は，

$$(\alpha'_1+\beta'_1)a_1+(\alpha'_2+\beta'_2)b_2-C_A(a_1)-C_B(a_2)$$
$$-(r_A/2)\alpha'\Sigma\alpha'-(r_B/2)\beta'\Sigma\beta'$$

となるから，a_1 と b_2 の最適性を保持するには，$\alpha'_1+\beta'_1=\alpha_1$，$\alpha'_2+\beta'_2=\beta_2$ が必要となる。また，プリンシパルの問題(21a)は，

$$a_1+b_2-C_A(a_1)-C_B(b_2)-(r_a/2)\alpha'\Sigma\alpha'-(r_B/2)\beta'\Sigma\beta'$$

の最大化となるから，結局，最適な α' と β' を発見する問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned}
\min\quad & (r_A/2)\alpha'\Sigma\alpha'+(r_B/2)\beta'\Sigma\beta' \\
\text{s. t.}\quad & \alpha'_1+\beta'_1=\alpha_1 \qquad\qquad (22)\\
& \alpha'_2+\beta'_2=\beta_2
\end{aligned}$$

これを解くと次式を得る[22]。ただし，$R=r_A+r_B$ である。

$$\begin{aligned}
&\alpha'_1=(r_B/R)\alpha_1 \qquad \alpha'_2=(r_B/R)\beta_2 \\
&\beta'_1=(r_A/R)\alpha_1 \qquad \beta'_2=(r_A/R)\beta_2 \qquad\qquad (23)
\end{aligned}$$

これを(22)の目的関数に代入すると，集団のリスク・プレミアム RP_G は，

$$\begin{aligned}
RP_G&=(r_A/2)\alpha'\Sigma\alpha'+(r_B/2)\beta'\Sigma\beta' \\
&=(r_G/2)(\alpha_1^2\sigma_1^2+2\alpha_1\beta_2\rho\sigma_1\sigma_2+\beta_1^2\sigma_2^2)
\end{aligned}$$

となる。ここで，$r_G = r_A r_B / R$ であり，$1/r_G = (1/r_A) + (1/r_B)$，すなわち，$1/r_G$は2人のリスク許容度を合計したものであるから，その逆数r_Gは集団（シンジケート）としてのリスク回避係数を表わすものと解される。上式を(18)と比較できるように修正すると次式になる。

$$RP_G = (r_A/2)(r_B/R)^2(\alpha_1^2\,\sigma_1^2 + \alpha_1\beta_2\rho\sigma_1\sigma_2)$$
$$+ (r_B/2)(r_A/R)^2(\beta_2^2\,\sigma_2^2 + \alpha_1\beta_2\rho\sigma_1\sigma_2)$$

(r_B/R)と(r_A/R)はいずれも1未満であるから，$\rho = 0$であれば，RP_Gが(18)に示されている非協力解のリスク・プレミアム（$RP_A + RP_B$）を下回ることが明らかとなる。したがって，次の命題が導かれる。

命題1：生産関数が技術的にも確率的にも独立であれば，相互監視に裏付けられた補助契約の締結がこれを認めない非協力解に優越する。

つまり，集団業績評価の個人別独立評価に対する優越性が確認されるのである。

$\rho > 0$の場合にはどうであろうか。上式が示すように，RP_Gはρの増加関数である。他方，前述したように，相対評価のもとでのリスク・プレミアムはρの減少関数であり，$\rho = 1$においてゼロになる。つまり，相関係数のある点で両者の優劣関係が逆転するから，次の命題が成立する[23)]。

命題2：生産関数が独立であっても確率的に独立でないときには，相関係数があるρよりも低ければ集団業績評価が有利となり，そうでなければ競争的な相対評価が有利になるというある$\rho > 0$が存在する。

ところで，以上の分析は(11)の非協力解(a, b)を前提とするものであった。集団業績評価のもとでは，それは最適ではない。そこで，一般式(21)をケース3に適用して，その最適契約を導こう。確実性等価値(21b)は，

$$\max \quad \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_2 - C_A(a_1) - C_B(b_2) - (r_G/2)(\gamma_1^2\sigma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \gamma_2^2\sigma_2^2)$$

と表される。ここで，γ_iは集団業績 x_iの配分率である。したがって，行動選択の最適性条件は，

$$\gamma_1 = C_A'(a_1) \qquad \gamma_2 = C_B'(b_2) \tag{24b}$$

となる。プリンシパルの問題(21a)は，制約条件(24b)のもとで次式を最大化する問題となる。

$$\max \quad a_1 + b_2 - C_A(a_1) - C_B(b_2) - (r_G/2)(\gamma_1^2\sigma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \gamma_2^2\sigma_2^2) \tag{24a}$$

この最適解は次式になる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= F^{-1}(1 + r_G\sigma_2(\sigma_2 C_B'' - \rho\sigma_1 C_A'')) \\ \gamma_2 &= F^{-1}(1 + r_G\sigma_1(\sigma_1 C_A'' - \rho\sigma_2 C_B'')) \end{aligned} \tag{25}$$

なお，

$$F = 1 + r_G(\sigma_1^2 C_A'' + \sigma_2^2 C_B'') + r_G^2(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 C_A'' C_B''$$

である。

ここで，ケース3に次のような数値を当てはめて，(競争的)相対評価と集団業績評価の有効性を比較してみよう。

$r_A = r_B = 2 \quad r_G = 1 \quad C_A(a_1) = 0.25a_1^2 \quad C_B(b_2) = 0.25b_2^2, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1$

もちろん，最適解は ρ の値に応じて変化する。3つの例を示すと次のようになる。

[相対業績評価]

$\rho = 0$	$a_1 = b_2 = 1$	$RP_A = RP_B = 0.5$	$CE = 1$
$\rho = 0.5$	$a_1 = b_2 = 1.1429$	$RP_A = RP_B = 0.4898$	$CE = 1.1429$
$\rho = 1$	$a_1 = b_2 = 2$	$RP_A = RP_B = 0$	$CE = 2$

[集団業績評価]

$\rho = 0$	$a_1 = b_2 = 4/3$	$RP_G = 0.5$	$CE = 4/3$

$\rho=0.5 \quad a_1=b_2=1.1429 \quad RP_G=0.4898 \quad CE=1.1429$

$\rho=1 \quad a_1=b_2=1 \quad RP_G=0.5 \quad CE=1$

$\rho=0$のときは，相対評価は絶対評価に退化することは前述のとおりである。コストとリスクに対する態度の両面で各エイジェントに同一属性を仮定している本例では，$\rho=0.5$において2つのインセンティブ・スキームは同一のパフォマンスに収束しており，それを境に両者の優劣が逆転している。

補助取引の許容は，それを認めない場合に比べ，エイジェントの自由裁量の余地を増やすから，プリンシパルの統制力を低下させる。プラス効果が生じたのは，相互監視がそのマイナス効果を十分に補う情報価値をもったからである。と同時に，この結論は生産関数が独立であるという前提のもとで導かれている。それにより自由裁量の拡大余地が制限されたからにほかならない。生産関数が独立でない場合には，自由裁量の余地が拡大するから，集団形成がプリンシパルに負の影響を与える可能性が生じる。その場合には，集団は結託（collusion）と呼ぶにふさわしい組織になるから，プリンシパルは，一定のコストを負担して，これを防止する契約（collusion-proof contracts）を締結することが必要となる[24)]。

まとめ

本稿での分析結果は次の諸点に要約される。マルチタスクのインセンティブ・スキームには，リスク・シェアリングと動機づけ機能のほかに，いかに目的適合的に努力を業務別に配分するかという新たな機能がつけ加わる。この機能の追加は，多くの場合，業務別の業績尺度と報酬の結びつきを緩和するように働く。実務において，比較的 low-powered なインセンティブ方式が採られる理由の一端をこの点に求めた。次にエイジ

ェントを複数に拡張し，集団形成を許容するか否かという組織選択に応じて，それぞれの組織に適合する業績評価システムを抽出し，それらの有効性を比較した。

本稿での分析は，生産関数が分離可能な場合を前提にした。分離不能の場合にはどのような修正が必要になるであろうか。また，ここでは集団形成を二者択一的に取り扱ったが，所定の制限内でこれを許容するという中間的な選択が可能であろう。その場合の評価ルールはどのようになるであろうか。これらの分析については別の機会に譲る。

注

1）分析において最初から線型性を前提にするのは，一見、アドホックな仮定に見えるが，そうではない。Holmstrom and Milgrom［3］は，エイジェントが連続する時間間隔［0, 1］のなかの τ 時点（$0 \leqq \tau \leqq 1$）ごとに確率的な業績 $x(\tau)$ に一定の方向性を与えるべく，τ 時点以前の累積業績を観察しながら，努力 $a(\tau)$ を決定していくという動的モデルのもとでは，$a(\tau)$ が時間を通じて一定になる一方，途中経過とは無関係に報酬 z は最終業績 x に対して線型関数 $(z=\alpha^T x+\beta)$ になることを証明している。実務で採用されるインセンティブ・スキームは概ね線型であろうから，この結論は分析モデルのリアリティを高めるのに有益である。

2）$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$，$x=(x_1, x_2)$ と仮定し，$\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ が，期待値 $(0, 0)$，標準偏差 (σ_1, σ_2)，相関係数 ρ とする2変量正規分布 $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ に従う場合の確実性等価値 CE を求めると，次のようになる。なお，

$$
\begin{aligned}
z(x) &= \alpha^T x+\beta \\
&= \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\beta \\
&= \alpha_1(\mu(a_1)+\varepsilon_1)+\alpha_2(\mu(a_2)+\varepsilon_2)+\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= (1/2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}) \\
&\qquad \exp -1/2(1-\rho^2)\{(\varepsilon_1/\sigma_1)^2-2\rho\varepsilon_1\varepsilon_2/\sigma_1\sigma_2+(\varepsilon_2/\sigma_2)^2\}
\end{aligned}
$$

であることを確認しておこう。

$$
\begin{aligned}
EU &= \iint (1/2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})(-\exp)-r\{\alpha_1(\mu(a_1)+\varepsilon_1)+\alpha_2(\mu(a_2)+\varepsilon_2)+\beta \\
&\qquad -C\}(-1/2(1-\rho^2))\{(\varepsilon_1/\sigma_1)^2-2\rho\varepsilon_1\varepsilon_2/\sigma_1\sigma_2+(\varepsilon_2/\sigma_2)^2\}d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \\
&= -\iint(1/2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})\exp -1/2(1-\rho^2)[\{\varepsilon_1/\sigma_1+r(\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\rho\sigma_2)\}^2 \\
&\qquad -2\rho\{\varepsilon_1/\sigma_1+r(\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\rho\sigma_2)\}\{\varepsilon_2/\sigma_2+r(\alpha_2\sigma_2+\alpha_1\rho\sigma_1)\} \\
&\qquad +\{\varepsilon_2/\sigma_2+r(\alpha_2\sigma_2+\alpha_1\rho\sigma_1)\}^2]-r(\alpha_1\mu(a_1)+\alpha_2\mu(a_2)+\beta-C) \\
&\qquad +(r^2/2)(\alpha_1^2\sigma_1^2+2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2+\alpha_2^2\sigma_2^2)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2
\end{aligned}
$$

$$=-\exp-r(\alpha_1\mu(a_1)+\alpha_2\mu(a_2)+\beta-C)+(r^2/2)(\alpha_1^2\sigma_1^2+2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2$$
$$+\alpha_2^2\sigma_2^2)\cdot$$
$$\iint(1/2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})\exp-1/2(1-\rho^2)[\{\varepsilon_1/\sigma_1+r(\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\rho\sigma_2)\}^2$$
$$-2\rho\{\varepsilon_1/\sigma_1+r(\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\rho\sigma_2)\}\{\varepsilon_2/\sigma_2+r(\alpha_2\sigma_2+\alpha_1\rho\sigma_1)\}$$
$$+\{\varepsilon_2/\sigma_2+r(\alpha_2\sigma_2+\alpha_1\rho\sigma_1)\}^2]d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$$
$$=-\exp-r(\alpha_1\mu(a_1)+\alpha_2\mu(a_2)+\beta-C-(r/2)(\alpha_2^2\sigma_1^2+2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2$$
$$+\alpha_2^2\sigma_2^2))$$

ゆえに，次式を得る。

$$CE=\alpha_1\mu(a_1)+\alpha_2\mu(a_2)+\beta-C-(r/2)(\alpha_1^2\sigma_1^2+2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2+\alpha_2^2\sigma_2^2)$$

3）α がリスクプレミアムを規定するという事実は，動機づけとリスク負担がトレードオフ関係にあることを明瞭に示している。

4）総余剰のエイジェントへの配分額は β によって定まるから，一般のエイジェンシー・モデルにおける個人的合理性条件ないし参加条件は不要となる。

5）a_iに関する(2)の2階微分は$-C_{ii}$となり，コスト関数の凸性により，負になるから，(2)は最大化の十分条件を満足する。

6）$x_i=a_i+\varepsilon_i$ $(i=1,2)$，$a=(a_1, a_2)$，$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$ のもとで，(1)のラグランジュ関数を定義すると，次式になる。

$$L=B(a_1, a_2)-C(a_1, a_2)-(r/2)(\alpha_1^2\sigma_{11}+2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}+\alpha_2^2\sigma_{22})$$
$$+\lambda_1(\alpha_1-C_1)+\lambda_2(\alpha_2-C_2)$$

ただし，σ_{ij}は ε_iと ε_jの共分散である。上式を a_iで偏微分すると次式になる。

$$\partial L/\partial a_i=B_i-C_i-r(\alpha_i\sigma_{ii}C_{ii}+\alpha_i\sigma_{ij}C_{ij}+\alpha_j\sigma_{ij}C_{ii}+\alpha_j\sigma_{jj}C_{ij})$$

ただし，$i\neq j$ である。上式に最適性の1階条件を適用して整理すると，

$$B_i=\alpha_i(1+r(\sigma_{ii}C_{ii}+\sigma_{ij}C_{ij}))+\alpha_j(\sigma_{ij}C_{ii}+\sigma_{jj}C_{ij})$$

となるから，次式を得る。

$$(B_1, B_2)=(a_1, a_2)\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\right)$$

7）(7)のラグランジュ関数は次のように定義される。

$$L=B(a_1, a_2)-C(a_1, a_2)-(r/2)(\alpha_1^2\sigma_{11}+\alpha_2^2\sigma_{22})+\lambda_1(\alpha_1-C_1)$$
$$+\lambda_2(\alpha_2-C_2)$$

これを，それぞれ，a_1と a_2で偏微分して，最適性の1階条件を適用すると，

$$\begin{aligned}\partial L/\partial a_1&=B_1-C_1-r(\alpha_1\sigma_{11}C_{11}+\alpha_2\sigma_{22}C_{21})\\&=B_1-\alpha_1(1+r\sigma_{11}C_{11})-r\alpha_2\sigma_{22}C_{21}\\&=0\end{aligned} \qquad \text{(A-1)}$$

$$\begin{aligned}\partial L/\partial a_2&=B_2-C_2-r(\alpha_1\sigma_{11}C_{12}+\alpha_2\sigma_{22}C_{22})\\&=0\end{aligned} \qquad \text{(A-2)}$$

(A-2)を整理すると，

$$\alpha_2=(B_2-C_2-r\alpha_1\sigma_{11}C_{12})/\sigma_{22}C_{22} \qquad \text{(A-3)}$$

となるから，これを(A-1)に代入すると(8)を得る。

8）ここでは，$\alpha_2 = C_2(a_2) = 0$ のもとでも，$a_2(\gg 0)$ の動機づけが可能であることが仮定されている。たとえば，ある $\bar{a}_2 > 0$ に対して，$C_2(\bar{a}_2) = 0$，$a_2 > \bar{a}_2$ なるすべての a_2 に対して，$C_2(a_2) > 0$ となるようなコスト関数である。

9）$C_{12} = 0$ であれば，α_1 は(6)に退化する。さらに，$\sigma_{11} = 0$ であれば，$\alpha_1 = B_1$ が成立し，最善解が実現する。

10）その場合，$a_1 + a_2$ は，$C'(a_1 + a_2) = 0$（′は1階微分を表す）を満足する値として求められ，a_1 と a_2 はそれぞれの限界利益 B_1 と B_2 が等しくなるように定められるであろうから，(8)より，$\alpha_1 = 0$ となる。

11）志望校に合格させることをシングルタスクとする予備校教師と，学力だけでなく全人格的な人間教育を目的とする学校の教員のペイ・システムは著しく異なるであろう。あるいは，チェーンストアにおけるフランチャイズ店のオーナー店長と直営店のマネジャー店長との間のペイ・システムの違いもその一例であろう。

12）エイジェント A の報酬は，

$$z_A = \alpha_0 + \alpha_1(a_1 + \varepsilon_1) + \alpha_2(b_2 + \varepsilon_2)$$

となるから，確実性等価値は，

$$CE_A = \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_2 - C_A(a_1) - (r_A/2)(\alpha_1^2\sigma_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2^2\sigma_2^2)$$

となり，動機づけ条件式は，$\alpha_1 = C_A'$ となる。エイジェント B についても同様であるから，(10)に対応するラグランジュ関数は，

$$L = a_1 + b_2 - C_A(a_1) - C_B(b_2) - (r_A/2)(\alpha_1^2\sigma_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2^2\sigma_2^2)$$
$$-(r_B/2)(\beta_1^2\sigma_1^2 + 2\beta_1\beta_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \beta_2^2\sigma_2^2) + \lambda_1(\alpha_1 - C_A') + \lambda_2(\beta_2 - C_B')$$

となる。これを，それぞれ，a_1 と a_2 で偏微分して最適性条件を適用すると，

$$\partial L/\partial a_1 = 1 - \alpha_1 - r_A C_A''(\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2) = 0 \tag{A-4}$$
$$\partial L/\partial a_2 = -r_A(\alpha_1\rho\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2\sigma_2^2) = 0 \tag{A-5}$$

となり，(A-5)より，(16b)が得られ，これを(A-4)に代入すると(16a)が導かれる。

13）Holmstrom and Milgrom［5］は，連続的かつ微小的タスクという仮定のもとで単独責任の合理性を証明している。なお，ここでは，エイジェント A と B に，それぞれ，x_1 と x_2 に対する業績責任を負わせているが，本ケースの仮定のもとでは，A と B のコスト関数が同一であるから，σ_1 と σ_2 が同一であれば，だれがどのタスクを担当するかは無差別となる。

14）競争評価がもたらす逆機能現象については，Lazear［8］を参照せよ。なお，相関係数が負の場合には，相対評価は競争的ではなく互恵的になる。

15）コスト関数が完全代替的であるときには，リスク・プレミアムは固定額になるが，分割可能な場合には，α や β に関して変動的になることが確認されるであろう。

16) ここでは各エイジェントは非協力の関係にあるから，「協調」といっても，各自の努力が結果的に共通業績を高めるのに貢献するという程度の意味であって，各自の努力に関して2人の間になんらかの合意があることを前提とするものではない。

17) $C_{A2}(a_2)$は，$a_2=0$において左右対称で，a_2の絶対値に関して増加関数であると仮定されている。

18) ここで「協力」というのはエイジェント間の関係であって，プリンシパルとの間では非協力の関係にあることは言うまでもない。

19) サイド・ペイメントの授受によって，各人が単独でいるときよりも高い効用が得られるならば，集団が形成される。

20) ケース3のもとで(11d)の最適解を求めると次のようになる。

$$\gamma_i=(r_A\alpha_i-r_B\beta_i)/R$$
$$\alpha_i-\gamma_i=(r_B/R)(\alpha_i+\beta_i)$$
$$\beta_i+\gamma_i=(r_A/R)(\alpha_i+\beta_i)$$

ただし，$R=r_A+r_B$である。$\rho=0$とすると，$\alpha_2=\beta_1=0$であるから，$r_B/R<1$，$r_A/R<1$より，γはコミッションレートα_1とβ_2を引き下げ，動機づけ能力を低下させる。

21) $T(a,b)$が直接の分析対象にならないのは，それが2人の間の配分問題であって，集団全体からすれば相殺され，行動選択に影響を与えないからである。

22) (22)は次式の最大化問題と等価である。

$$\begin{aligned}L=\ &\sigma_1^2(r_A\alpha'^2_1+r_B(\alpha_1-\alpha'_1)^2)\\&+2\rho\sigma_1\sigma_2(r_A\alpha'_1\alpha'_2+r_B(\alpha_1-\alpha'_1)(\beta_2-\alpha'_2))\\&+\sigma_2^2(r_A\alpha'^2_2+r_B(\beta_2-\alpha'_2)^2)\end{aligned}$$

したがって，これをα'_1とα'_2で偏微分して最適性条件を適用すると，(23)が導かれる。

23) Ramakrishnan and Thakor［10］は伝統的なエイジェンシー・モデルを用いて同一の命題を導いている。その解説については佐藤［16］を参照せよ。

24) 結託防止付契約については，Tirole［11］［12］，佐藤［17］（第6章）を参照せよ。本稿における(11d)は結託防止の条件式である。

［参考文献］

［1］ Baker, G., M. Jensen and K. Murphy, "Competition and Incentives: Practice vs Theory," *Journal of Finance* (1988), 593-616.

［2］ Holmstrom, B., "Moral Hazard in Teams," *Bell Journal of Economics* (1982), 324-340.

［3］ Holmstrom, B. and P. Milgrom, "Aggregation and Linearity in the Provision of Intertemporal Incentives," *Econometrica* (1987), 303-328.

[4] Holmstrom, B. and P. Milgrom, "Regurating Trade among Agents," *Journal of Institutional and Theoretical Economics* (1990), 85-105.

[5] Holmstrom, B. and P. Milgrom, "Multitask Principal-Agent Analyses: Incentive Contracts, Asset Ownership, and Job Design," *Journal of Law, Economics and Organization* (1991), 24-52.

[6] Ito, H., "Incentive to Help in Multi-Agent Situations," *Econometrica* (1991), 611-636.

[7] Ito, H., "Cooperation in Hierarchical Orgnization: An Incentive Perspective," *Journal of Law, Economics and Organization* (1992), 321-345.

[8] Lazear, E., "Pay Equality and Industrial Politics," *Journal of Political Economy* (1989), 561-580.

[9] Mookherjee, D., "Optimal Incentive Schemes with Many Agents," *Reveiw of Economic Studies* (1984), 433-446.

[10] Ramakrishnan, R. and A. Thakor, "Cooperation versus Competition in Agency," *Journal of Law, Economics and Organization* (1991), 248-283.

[11] Tirole, J., "Hierarchies and Bureaucracies: On the Role of Collusion in Organization," *Journal of Law, Economics and Organization* (1986), 181-214.

[12] Tirole, J., "The Multicontract Organization," *Canadian Journal of Economics* (1988), 181-214.

[13] Varian, H., "Monitoring Agents with Other Agents," *Journal of Institutional and Theoretical Economics* (1990), 153-174.

[14] Williamson, O., *The Economic Institutions of Capitalism*, Free Press (1985).

[15] Wilson, R., "The Theory of Syndicates," *Econometrica* (1968), 119-132.

[16] 佐藤紘光「業績評価システムの有効性比較――競争対協調」『企業会計』(1993 No. 6), 119-125.

[17] 佐藤紘光『業績管理会計』新世社(1993).